ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη επιμεριστικής ιδιότητας στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, σχολικό βιβλίο σελίδα 43.

Α2. Ορισμός εσωτερικού γινομένου, σχολικό βιβλίο σελ. 41. (Δεν ζητείται ο ορισμός στην περίπτωση που ένα τουλάχιστον διάνυσμα είναι μηδενικό).

Α3. α) Λάθος

β) Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|^2$ πραγματικοί αριθμοί με $|\vec{\alpha}|^2 \neq 0$, το κλάσμα

$$\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$$

είναι πραγματικός αριθμός, άρα το γινόμενο

$$\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\cdot\vec{\imath}$$

είναι διάνυσμα.

Α4. 1. Λάθος

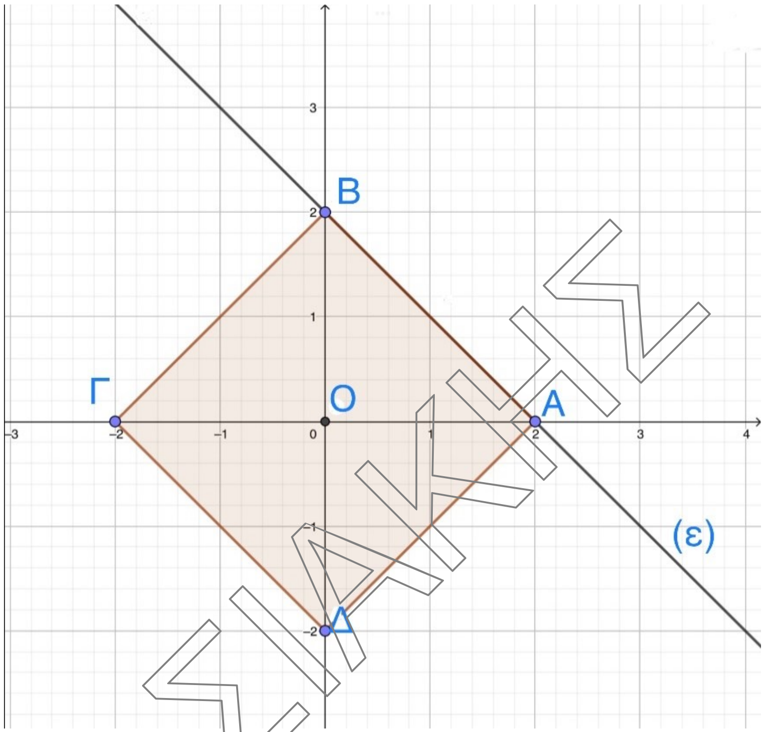
2. Λάθος

3. Σωστό

4. Λάθος

5. Λάθος

ΘΕΜΑ Β



Β1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{0-2} = -1$$

και αφού η (ε) διέρχεται από το $A(2,0)$

έχουμε $y - 0 = -1 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2$ (ε).

Β2. Το $O(0,0)$ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου άρα μέσο της διαγωνίου ΒΔ, οπότε αν $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$ θα ισχύουν :

$$x_O = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{0 + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta = 0$$

$$y_O = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{2 + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta = -2$$

Άρα $\Delta(0,-2)$.

Αν $M(x_M, y_M)$ το μέσο της πλευράς ΑΔ θα ισχύουν

$$x_M = \frac{x_A + x_\Delta}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_\Delta}{2} = \frac{0+(-2)}{2} = -1$$

οπότε $M(1, -1)$.

Ο συντελεστής της ΑΔ είναι

$$\lambda_{A\Delta} = \frac{y_\Delta - y_A}{x_\Delta - x_A} = \frac{-2-0}{0-2} = 1$$

οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της μεσοκαθέτου θα ισχύει: $\lambda \cdot \lambda_{A\Delta} = -1$

άρα $\lambda = -1$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου αφού διέρχεται από το $M(1, -1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$ θα είναι:

$$y - (-1) = -1 \cdot (x-1) \Leftrightarrow y + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x$$

που είναι η διχοτόμος $2^{ης}$, $4^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

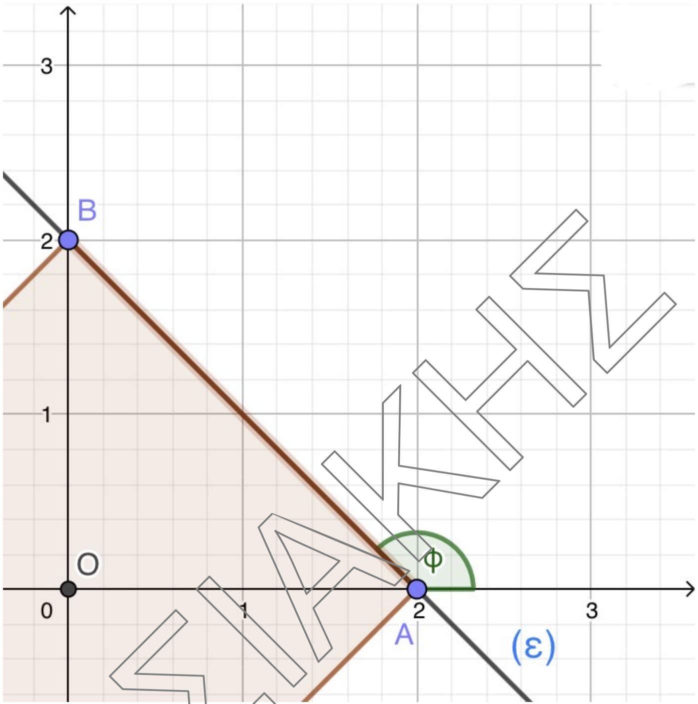
Β3. Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΒΓ είναι παράλληλη προς την ευθεία της πλευράς ΑΔ άρα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε $\lambda = \lambda_{A\Delta} = 1$ και αφού διέρχεται από το $B(0,2)$ θα έχει εξίσωση

$y - 2 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x + 2$

Το μέτρο $|\overrightarrow{B\Gamma}|$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς του τετραγώνου άρα

$|\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$.

Β4.



Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lambda_{AB} = -1$ άρα $\varepsilon\varphi\varphi = -1$ και αφού $0^0 \leq \varphi < 180^0$ θα έχουμε $\varphi = 135^0$.

i. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = 0$ γιατί $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Delta}$

ii. Τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Delta A}$ είναι αντίρροπα οπότε η γωνία που σχηματίζουν είναι 180^0 άρα $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta A} = |\overrightarrow{B\Gamma}| \cdot |\overrightarrow{\Delta A}| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^0 =$

$= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (-1) = -8$

iii. Αφού $\overrightarrow{AM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A\Gamma}$ έχουμε ότι $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) = \varphi = 135^0$ με $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi =$

$= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \cdot \sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & x \\ -4x & -x-1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(-x-1) - x(-4x) = 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 + 4x^2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$

Άρα

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} \begin{cases} \frac{2+4}{6} = 1 \\ \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

(1)

Ακόμη
$\vec{\beta} \perp \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow (-4x) \cdot x + (-x-1) \cdot (-2x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = 1$ (2)

Από (1) και (2) η κοινή τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο σχέσεις $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$ είναι η $x = 1$

Γ2. Για $x = 1$ έχουμε $\vec{\beta} = (-4, -2)$ και $\vec{\gamma} = (1, -2)$.

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε

$\vec{\delta} = \kappa \cdot \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma} \Leftrightarrow (-3,1) = \kappa(-4,-2) + \lambda(1,-2) \Leftrightarrow$
$(-3,1) = (-4\kappa, -2\kappa) + (\lambda, -2\lambda) \Leftrightarrow (-3,1) = (-4\kappa + \lambda, -2\kappa - 2\lambda)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\kappa + \lambda = -3 \\ -2\kappa - 2\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\kappa + 2\lambda = -6 \\ -2\kappa - 2\lambda = 1 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$-10\kappa = -5 \Leftrightarrow \kappa = \frac{-5}{-10} \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{2}$

Με αντικατάσταση του κ παίρνουμε

$-4\kappa + \lambda = -3 \Leftrightarrow -4 \cdot \frac{1}{2} + \lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -3 + 2 \Leftrightarrow \lambda = -1.$

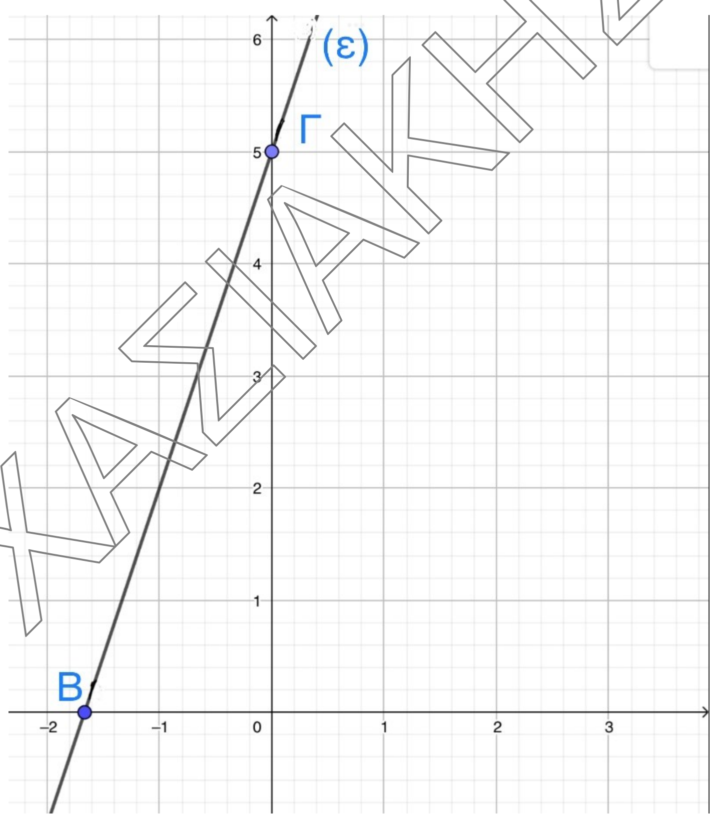
Άρα $\vec{\delta} = \frac{1}{2}\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

Γ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\delta}$ είναι $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{-3}$ οπότε ο συντελεστής της ευθείας (ε) ως κάθετης στο $\vec{\delta}$ θα είναι $\lambda_{\varepsilon} = 3$.

Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από το $A(-1,2)$ θα έχω

$y - 2 = 3(x+1) \Leftrightarrow y = 3x + 3 + 2 \Leftrightarrow y = 3x + 5$

Γ4.



Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.

Με τον $x'x$: θέτουμε $y = 0$ οπότε $x = -\frac{5}{3}$. Άρα $B\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

Με τον $y'y$: θέτουμε $x = 0$ οπότε $y = 5$. Άρα $\Gamma(0,5)$.

Το τρίγωνο $O\hat{B}\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Ο οπότε

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta\acute{\alpha}\sigma\eta \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma = \frac{1}{2}(OB)(O\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot 5 = \frac{25}{6}\,\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2+2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3=0$ θεωρείται τριώνυμο με άγνωστο το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Έτσι $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$ και

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2\cdot 1}=\begin{cases}\dfrac{-2+4}{2}=1\\[2mm] \dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

Αφού η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ είναι αμβλεία η λύση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1>0$ απορρίπτεται γιατί δηλώνει $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)>0$ ενώ πρέπει $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<0$.

Άρα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$.

Δ2.

Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$ το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ γράφεται $\overrightarrow{A\Gamma}=-3\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Για το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ έχουμε :

$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=-3\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=-4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

Για το διάνυσμα $\overrightarrow{BM}$ της διαμέσου της ΑΓ ισχύει

$$\overrightarrow{BM}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}}{2}=\frac{-\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)+\left(-4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)}{2}=\frac{-\vec{\alpha}+\vec{\beta}-4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}}{2}=\frac{-5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}}{2}$$

Για το μέτρο

$$\left|\frac{-5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}}{2}\right|$$

θα υπολογίσουμε το

$$\left|\frac{-5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}}{2}\right|^2=\left(\frac{-5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}}{2}\right)^2=\frac{25\vec{\alpha}^2-30\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2}{4}=$$

$$\frac{25|\vec{\alpha}|^2-30\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\left|\vec{\beta}\right|^2}{4}=\frac{25\cdot 2^2-30\cdot(-3)+9\cdot 3^2}{4}=\frac{271}{4}$$

Άρα

$$|\overrightarrow{BM}| = \left|\frac{-5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}}{2}\right| = \sqrt{\frac{271}{4}} = \frac{\sqrt{271}}{2}$$

Δ3. Έχουμε $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \sqrt{7}\cdot\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \sqrt{7}\cdot\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \Rightarrow$

$\left|\sqrt{7}\cdot\vec{\gamma}\right| = \left|-\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \sqrt{7}\cdot|\vec{\gamma}| = \left|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right|$

και επειδή τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, ισοδύναμα παίρνουμε:

$$\left(\sqrt{7}\cdot|\vec{\gamma}|\right)^2 = \left|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow 7\cdot|\vec{\gamma}|^2 = \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$7\cdot|\vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 7\cdot|\vec{\gamma}|^2 = 2^2 + 4\cdot(-3) + 4\cdot 3^2$$

$$\Leftrightarrow 7\cdot|\vec{\gamma}|^2 = 4 - 12 + 36 \Leftrightarrow 7\cdot|\vec{\gamma}|^2 = 28 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4$$

Και επειδή $|\vec{\gamma}| \geq 0$ έχω $|\vec{\gamma}| = 2$.

Δ4. Έχουμε $\vec{\gamma}^2 = |\vec{\gamma}|^2 = 4$ και

$\left[\vec{\alpha}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)\right]\cdot\vec{\alpha} = \left(\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha} = \left(4 - (-3)\right)\cdot\vec{\alpha} = 7\vec{\alpha}$

Επίσης $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\cdot\vec{\beta} = |-3|\cdot\vec{\beta} = 3\vec{\beta}$ άρα το διάνυσμα $\vec{x}$ γράφεται

$$\vec{x} = 4\vec{\beta} - 7\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = -7\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Έτσι $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} + \left(-7\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = -\vec{\alpha} - \vec{\beta} - 7\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -6\vec{\alpha}$

Άρα $\left(\overrightarrow{AB} + \vec{x}\right)//\vec{\alpha}$ και επειδή $-6 < 0$ έχω $(\overrightarrow{AB} + \vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$.