ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 99 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός σελίδα 33 σχολικού βιβλίου

Α3. Θεώρημα σελίδα 76 σχολικού βιβλίου

Α4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1}+1 < \sqrt{x_2}+1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται

Επομένως

$$\begin{aligned} & f(x) = y, x \geq 1 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = y \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x} = y-1, y \geq 1 \\ & \Leftrightarrow x = (y-1)^2, y \geq 1 \end{aligned}$$

Άρα $f^{-1}(x) = (x-1)^2, x \geq 1$

Β2. Έστω $M\left(x_0, f^{-1}(x_0)\right)$ σημείο της $C_{f^{-1}}$ με $x_0 \geq 1$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο Μ είναι $(\varepsilon): y - f^{-1}(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(x_0)(x - x_0)$

Το $A(0,-3)$ ανήκει στην (ε) άρα $-3 - f^{-1}(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(x_0)(0 - x_0)(1)$

Έχουμε ότι : $f^{-1}(x_0) = (x_0 - 1)^2$ και $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = 2(x_0 - 1)$

Άρα η (1) γίνεται

$-3 - (x_0 - 1)^2 = 2(x_0 - 1)(-x_0) \Leftrightarrow -3 - x_0^2 + 2x_0 - 1 = (2x_0 - 2)(-x_0)$

$\Leftrightarrow -x_0^2 + 2x_0 - 4 = -2x_0^2 + 2x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \overset{x_0>0}{\Leftrightarrow} x_0 = 2$

Άρα η εφαπτομένη είναι $(\varepsilon): y - f^{-1}(2) = \left(f^{-1}\right)'(2)(x - 2)$

$f^{-1}(2) = (2-1)^2 = 1$ και $\left(f^{-1}\right)'(2) = 2(2-1) = 2$

Επομένως $(\varepsilon): y - 1 = 2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 3$

Β3. Για την συνάρτηση $g \circ g$ έχουμε

$$A_{gog} = \left\{x \in A_g \quad \text{και}\; g(x) \in A_g\right\}$$

δηλαδή $x \neq 2$ και $g(x) \neq 2$

Άρα : $g(x) \neq 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-2} \neq 2 \Leftrightarrow 2x + 1 \neq 2x - 4 \Leftrightarrow 0x \neq -5$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \neq 2$

Επομένως $A_{gog} = \mathbb{R} - \{2\}$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{2\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)+1}{\dfrac{2x+1}{x-2} - 2} = \frac{\dfrac{4x+2}{x-2}+1}{\dfrac{2x+1}{x-2} - 2} = \frac{\dfrac{4x+2+x-2}{x-2}}{\dfrac{2x+1-2x+4}{x-2}} = \frac{5x}{5} = x$$

Άρα $(g \circ g)(x) = x, x \neq 2$

Ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων f, f^{-1} είναι η ευθεία $y = x$.

Β4. Για το $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(g(x)\cdot ημ\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right)$ έχουμε

$$\left|g(x)ημ\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right| = |g(x)|\cdot\left|ημ\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right| \le |g(x)|$$

Άρα $-|g(x)| \le g(x)\cdot ημ\left(\frac{1}{2x+1}\right) \le |g(x)|$

Επομένως $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}|g(x)| = 0$ οπότε και $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(-|g(x)|\right) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\left(g(x)\cdot ημ\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνεχής στο $A_f = (-\infty,1]$ άρα και στο $x=1$ επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Για $x<1$ έχουμε $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x^3(x-1)+(x-1)(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x^3+x+1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = x^3+x+1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^3+x+1) = 3$ επομένως $f(1)=3$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει $f(x) = x^3+x+1, x\le 1$

(β) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (-\infty,1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = (-\infty,1]$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_f = (-\infty,1]$ άρα $f(A_f) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty,3]$

Η f συνεχής στο $[-1,0]$ ως πολυωνυμική

$f(-1)=-1$ και $f(0)=1$ δηλαδή $f(-1)\cdot f(0)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστόν $x_0\in(-1,0)$ ώστε $\boxed{f(x_0)=0}$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα το x_0 μοναδικό.

Γ2. Ισχύει $g^2(x)=2xg(x)+3$ για κάθε $x\geq 1$

Άρα για κάθε $x\geq 1$ έχουμε :

$g^2(x)-2xg(x)=3 \Leftrightarrow g^2(x)-2xg(x)+x^2=x^2+3 \Leftrightarrow (g(x)-x)^2=x^2+3$

$\Leftrightarrow \sqrt{(g(x)-x)^2}=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow |g(x)-x|=\sqrt{x^2+3}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-x, x\geq 1$

$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow |\varphi(x)|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=0$ αδύνατη

Άρα $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 1$ και επειδή είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών) θα διατηρεί πρόσημο στο $[1,+\infty)$

Η g έχει ελάχιστη τιμή το 3 στη θέση 1 δηλαδή $g(1)=3$

Άρα $\varphi(1)=g(1)-1=2>0$ και αφού διατηρεί πρόσημο συμπεραίνουμε ότι $\varphi(x)>0$ στο $[1,+\infty)$

Άρα από την (1) προκύπτει $g(x)-x=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow g(x)=x+\sqrt{x^2+3}$

Γ3. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=+\infty$

Επίσης $-1<x_0<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\frac{x_0}{2}<0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{x_0}{2}\right)<f(0) \Leftrightarrow \frac{3}{8}<f\left(\frac{x_0}{2}\right)<1$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$ για κάθε $\alpha\in(0,1)$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right)^{g(x)} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\left(f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right)^u=0,$

(*) θέτουμε $u=g(x)$ άρα $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

Άρα η εξίσωση γίνεται $ημ\left(f(x)\right)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$

Γ4. Για $x \neq 1$ και $x \neq 0$ η εξίσωση $\dfrac{f(-x_0)+1}{x}+\dfrac{f(x_0+x)}{x-1}=0$ γίνεται

$(x-1)\left(f(-x_0)+1\right)+x\cdot f(x_0+x)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x-1)\left(f(-x_0)+1\right)+x\cdot f(x_0+x)$

Η h συνεχής στο $[0,1]$

$h(0)=-\left(f(-x_0)+1\right)=-f(-x_0)-1=-\left(-x_0^{\,3}-x_0+1\right)-1=-3<0$

Διότι : $f(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^{\,3}+x_0+1=0 \Leftrightarrow -x_0^{\,3}-x_0=1$

$h(1)=f(x_0+1)>0$

Διότι : $-1<x_0<0 \Leftrightarrow 0<x_0+1<1 \overset{f\,γν.αύξουσα}{\Leftrightarrow} f(0)<f(x_0+1)<f(1) \Leftrightarrow 0<f(x_0+1)<3$

Δηλαδή $h(0)\cdot h(1)<0$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (α) Για το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1)-g(1-h)}{h}$ θέτουμε $x=1-h$ άρα $h=1-x$

Όταν $h \to 0$ τότε $x \to 1$ άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(1)-g(x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

Άρα $g(x)=\begin{cases} \ln x+2g'(1), & 0<x<1 \\ -\dfrac{1}{x}+3κ, & x\geq 1 \end{cases}$

Η g συνεχής στο 1 αφού είναι παραγωγίσιμη άρα

$$\lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^+}g(x)=g(1) \text{ άρα } \boxed{2g'(1)=3κ-1}\ (1)$$

Αφού είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x}+3\kappa-(3\kappa-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x}+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x-1}{x}}{x-1}=1 \text{ άρα } g'(1)=1$$

Άρα από την σχέση (1) προκύπτει $\kappa=1$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x+2g'(1)-2g'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

Άρα $g(x)=\begin{cases}\ln x+2, & 0<x<1\\ -\frac{1}{x}+3 & x\geq 1\end{cases}$

Δ2. Ισχύει $g(1)=2$ και $g'(1)=1$ άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $A(1,g(1))$ είναι η $y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=x-1\Leftrightarrow \boxed{y=x+1}$

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f, η εξίσωση εφαπτομένης στο Μ είναι η

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow \boxed{y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0}$$

Θα πρέπει το σύστημα $\begin{cases}f'(x_0)=1\\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=1\end{cases}$ να έχει λύση

Από την εξίσωση $f'(x_0)=1$ έχουμε $e^{x_0-1}=1\Leftrightarrow e^{x_0-1}=e^0\Leftrightarrow x_0=1$

Η $x_0=1$ επαληθεύει και την $f(x_0)-x_0f'(x_0)=1$ άρα η $y=x+1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(1,2)$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=g'(x)-f(x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

Η $g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<x<1\\ \frac{1}{x^2}, & x\geq 1\end{cases}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ αφού είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1),[1,+\infty)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 1^-}g'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}g'(x)=g'(1)=1$

άρα και στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$

Έστω $h(x)=\frac{1}{x}-e^{x-1}-1$ με $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

Η h συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και $h\left(\frac{1}{2}\right)=1-e^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{\sqrt{e}}$ ενώ $h(1)=-1$ δηλαδή $h\left(\frac{1}{2}\right)\cdot h(1)<0$ επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ ώστε $h(x_0)=0$

Έστω $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ με $x_1<x_2$ τότε :

$$x_1<x_2\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}-1>\frac{1}{x_2}-1 \qquad (1)$$

$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\Leftrightarrow -e^{x_1-1}>-e^{x_2-1} \qquad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει $h(x_1)>h(x_2)$, άρα η h γνησίως φθίνουσα επομένως το x_0 μοναδικό .

Δ4. Η συνάρτηση $\varphi(x)=e^{x-1}+1+x$ ορίζεται στο $A_\varphi=[0,+\infty)$

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε

- $x_1<x_2\Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\Leftrightarrow e^{x_1-1}+1<e^{x_2-1}+1$
- $x_1<x_2$

  Με πρόσθεση προκύπτει $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα

Για κάθε $x\geq 1$ έχουμε

$$e^{g(x)-1}+g(x)\geq e+2\Leftrightarrow e^{g(x)-1}+g(x)+1\geq e+3\Leftrightarrow \varphi(g(x))\geq\varphi(2)\Leftrightarrow g(x)\geq 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x}+3\geq 2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\leq 1\Leftrightarrow x\geq 1,$$ που ισχύει