

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A) Θεωρία.

B) α) i) $g'(x) = 0$ ii) $g'(x) = 2001$ κλπ.

β) i) Λάθος.

ii) $1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2)$. Λάθος.

iii) Από τα σχόλια του Θεωρήματος Bolzano, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α)
$$f(2) = \frac{2+i\bar{2}}{1-\bar{2}} = \frac{2+2i}{-1} = -2-2i$$

οπότε $|f(2)| = \dots = 2\sqrt{2}$ και $\arg[f(2)] = \dots = 5\pi/4$

β) Είναι $f(2) = 2\sqrt{2}[\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)]$ και

$$w = [f(2)]^{2004} = \{2\sqrt{2}[\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)]\}^{2004}$$

$$= (2\sqrt{2})^{2004} [\cos(2005\pi) + i\sin(2005\pi)]$$

$$= - (2\sqrt{2})^{2004} \text{ πραγματικός.}$$

γ) Με αντικατάσταση του $f(z)$ στο 1ο μέλος μετά τις πράξεις προκύπτει το 2ο μέλος.

δ) Αν $M(x,y)$ τότε $f(z)=x+iy$ οπότε με $|z| = 1$ από γ) ερώτημα είναι διαδοχικά:

$$\left| \frac{f(z) - 2}{f(z) + i} \right| = 1$$

ή $|f(z) - 2| = |f(z) + i|$ (*)

* 2η λύση. Από εδώ προκύπτει ότι το M είναι η μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος με άκρα τα $A(2,0)$ και $B(0,-1)$ στα οποία απεικονίζονται οι μιγαδικοί $z_1=2+0i$ $z_2=0-i$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου θα βρεθεί με γνώσεις Β' Λυκείου.

$$\begin{aligned} \eta & |2x + iy - 2| = |x + iy + i| \\ \eta & |(x - 2) + iy| = |x + i(y + 1)| \\ \eta & \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \\ \eta & -4x - 2y + 3 = 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο α)

• Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x + 6}{x + \beta} = 2$

Με $\alpha = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$ άτοπο.

Με $\alpha \neq 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x}{x} = \alpha - 1$.

Άρα $\alpha - 1 = 2$ και η f γίνεται

$$f(x) = \frac{2x + 6}{x + \beta} \quad (1)$$

- Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, οπότε, υπάρχει περιοχή της μορφής $(\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \beta)$ στην οποία $f(x) \neq 0$ και έτσι, στην περιοχή αυτή από την (1) βρίσκουμε:

$$x + \beta = \frac{2x + 6}{f(x)}$$

και αφού $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + 6}{f(x)} = 0$ (μορφή $\frac{4}{+\infty}$ ή $\frac{4}{-\infty}$)

είναι και $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + \beta) = 0$ ή $\beta = -1$.

Έτσι η f γίνεται $f(x) = \frac{2x + 6}{x + 1}, \quad x > -1$.

2^{ος} τρόπος εύρεσης του β .

Αν $\beta \neq -1$ είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + 6}{x + \beta} = \frac{4}{-1 + \beta}$ άτοπο.

Αν $\beta = -1$ είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+6}{x-1} = +\infty$. Άρα $\beta = -1$

β) Είναι $G(x) = \int f(x)dx = \int \frac{2x+6}{x+1} dx = \int (2 + \frac{4}{x+1}) dx$

ή $G(x) = 2x + 4 \ln|x+1| + c$

ή $G(x) = 2x + 4 \ln(x+1) + c$

Με $G(0) = 2$ προκύπτει $c = 2$, άρα

$$G(x) = 2x + 2 + 4 \ln(x+1), \quad x > -1.$$

γ) Είναι $h(x) = \frac{2x+2+4 \ln(x+1)}{x+1} = 2 + 4 \frac{\ln(x+1)}{x+1}, \quad x > -1$

και $h'(x) = \dots = 4 \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}, \quad x > -1$

τότε $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq e-1$

$h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e-1$

Το πρόσημο της h' , η μονοτονία της h και το μέγιστό της φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	-1	e-1	$+\infty$	
h'		+	0	-
h		\nearrow	$2 + \frac{4}{e}$	\searrow

κλπ.

ΘΕΜΑ 4^ο

Η δοσμένη ισότητα γράφεται

$$\int_1^x f(t) dt - \int_1^x g(t) dt = x^2 - 2x + 1$$

οπότε παραγωγίζοντας δύο φορές έχουμε:

$$f(x) - g(x) = 2x - 2 \tag{1}$$

$$f'(x) - g'(x) = 2 \tag{2}$$

Ακόμα: $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0 \tag{3}$

α) i) Η (1) δίνει $g(x) = f(x) - 2(x-1)$

Οπότε $g(\rho_1) = -2(\rho_1 - 1)$

$$g(\rho_2) = -2(\rho_2 - 1)$$

Άρα $g(\rho_1)g(\rho_2) = 4(\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1)$

και αφού $\rho_1 < 1 < \rho_2$ είναι $4(\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) < 0$ κλπ Bolzano.

ii) Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2]$ με τις σχέσεις (2)-(3). (είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ - παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2)$). Έτσι, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 2 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -2$$

(2^η λύση γίνεται με ΘΜΤ για την g , 3^η με την

$h(x) = g(x) + 2x$, 4^η με την $\varphi(x) = g'(x) + 2$)

β) i) Η g' είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g'(x_1) < g'(x_2) \Leftrightarrow g'(x_1) - 2 < g'(x_2) - 2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

έτσι η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα η f είναι κυρτή.

ii) Αφού $g'(\xi) = -2$ είναι $f'(\xi) = 0$ και η f' ως γνησίως αύξουσα αλλάζει πρόσημο στο ξ , όπως φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	ξ	$+\infty$
$f'(x)$	-	ξ	+

Άρα στο $x_0 = \xi$ η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο, το οποίο είναι μοναδικό.

γ) Οι C_f, C_y τέμνονται όταν

$$\{ y = f(x) \text{ και } y = g(x) \}$$

οπότε $f(x) = g(x)$

ή $f(x) - g(x) = 0$

ή από την (1): $2x - 2 = 0$, άρα: $x = 1$

Συνεπώς ζητάμε το

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx &= \int_0^1 |2x - 2| dx \\ &= \int_0^1 (2 - 2x) dx \\ &= [2x - x^2]_0^1 = 1 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$