ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Απόδειξη σελίδα 99.
β) Σελίδα 99 ακριβώς μετά από Παράγωγος και συνέχεια, οι έξι σειρές.

Α2. Ορισμός σελίδα 31.

Α3.

α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Λάθος. Η σωστή ιδιότητα είναι: $|\eta\mu x| \le |x|, x \in \mathbb{R}$.
δ) Σωστό
ε) Σωστό. Από Θεώρημα Bolzano $f(\alpha)f(\beta) < 0 (1)$. Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha) \ne f(\beta)$. Πράγματι, έστω $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε από τη σχέση (1) παίρνουμε, $f^2(\alpha) < 0$,πράγμα άτοπο.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\phi(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\phi'(x) = e^x$.

Επομένως $\phi'(0) = e^0 = 1 (1)$. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε ότι $\phi'(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - e^0}{x} = 1 (2)$

Επίσης, σύμφωνα με το συμβολισμό του Leibniz έχουμε ότι: $\varphi'(0)=\left.\dfrac{de^x}{dx}\right|_{x=0}$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x\text{-}e^0}{x}=\left.\dfrac{de^x}{dx}\right|_{x=0}=1$.

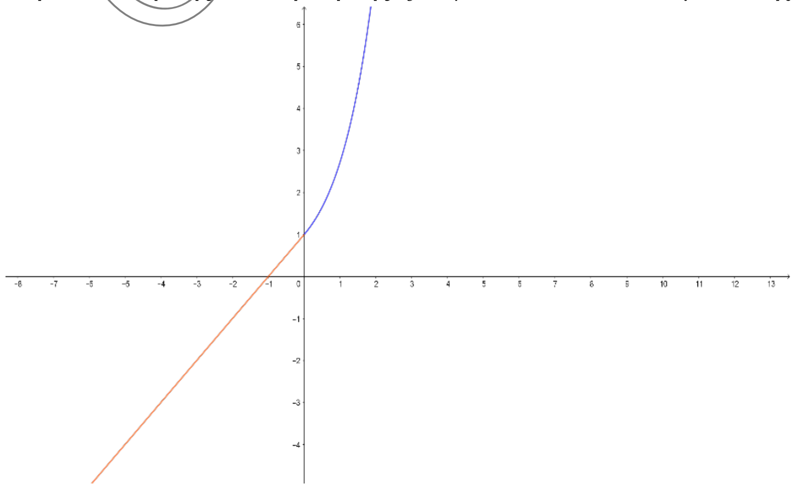
Β2. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής σε αυτό. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} e^x=\lim\limits_{x\to 0^-}(\alpha x+\beta)=e^0$.

Από την τελευταία έχουμε: $e^0=\alpha 0+\beta=e^0$, οπότε $\beta=1$.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x=0$. Έτσι έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(\alpha x+\beta)-e^0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-e^0}{x}\overset{(B1)}{=}1$ και για $\beta=1$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x+1-1}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha \cancel{x}}{\cancel{x}}=1\Rightarrow \alpha=1$.

Έτσι για $\alpha=\beta=1$ έχουμε: $f(x)=\begin{cases} e^x & ,\ \alpha\nu\quad x\geq 0\\ x+1 & ,\ \alpha\nu\quad x<0\end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f διαπιστώνουμε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα.

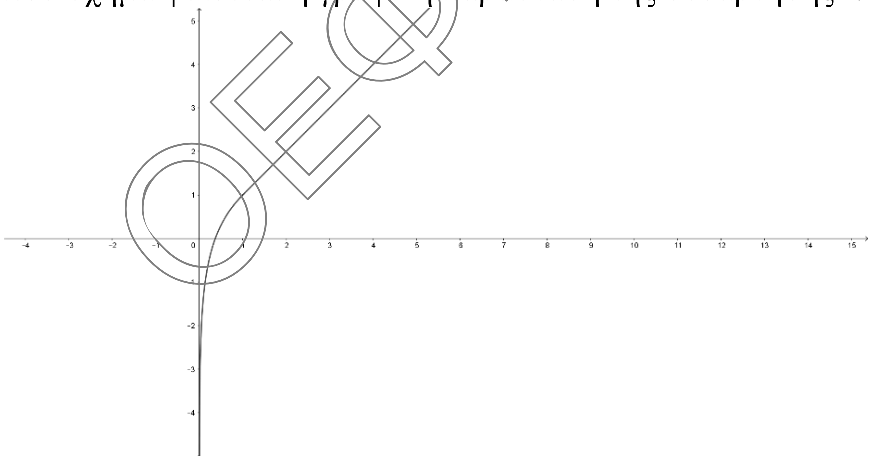
Β3. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η g το $(0,+\infty)$. Η συνάρτηση $h = fog$ ορίζεται στο $A=\{x\in\mathbb{R}/\ \ x\in(0,+\infty)\ \ και\ \ g(x)\in\mathbb{R}\}$. Επομένως $x>0\ \ και\ \ lnx\in\mathbb{R}$. Έτσι είναι τελικά $A=(0,+\infty)$.

Ιδιαιτέρως για $x\geq 1 \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln x \geq 0$,
οπότε για $x \geq 1$ είναι $h(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\ln x} = x.$

Για $0 < x < 1$ είναι $x < 1 \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$,
οπότε για $0 < x < 1$ είναι $h(x) = f(g(x)) = g(x)+1 = \ln x + 1.$

Έτσι τελικά είναι $h(x) = (fog)(x) = \begin{cases} x & ,\ αν\ \ x\geq 1 \\ lnx+1 & ,\ αν\ \ 0<x<1 \end{cases}.$

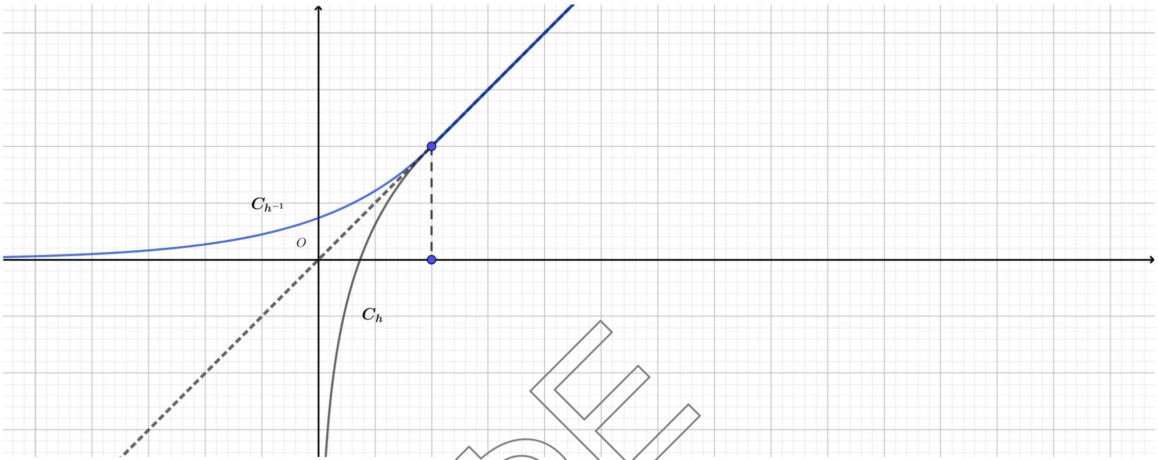
Β4. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης h.



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h προκύπτει ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα άρα ένα προς ένα, επομένως αντιστρέφεται. Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως η αντίστροφή της h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.
Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι
$h^{-1}(x)>0$, *οπότε* $|h^{-1}(x)| = h^{-1}(x)$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση της $|h^{-1}|$ ταυτίζεται με αυτήν της h^{-1} η οποία είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της h ως προς την ευθεία $y = x$.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των h, h^{-1} και της $y = x$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι γνησίως αύξουσα

αφού από $x_1 < x_2$ είναι τελικά $f(x_1) < f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Επίσης, είναι $f(0) = 0$.

Έτσι, από $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$ και από $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$.

Γ2. $$L_1 = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{3f(x)-5}{2f(x)}\right) = \lim_{x\to 0^-}(3f(x)-5)\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = (-5)(-\infty) = +\infty.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3f(x)-5}{2f(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+}(3f(x)-5)\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = (-5)(+\infty) = -\infty.$$

Οπότε, δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3f(x)-5}{2f(x)}\right)$.

Γ3.

α) $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} = A_{f^{-1}}$

β) $f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Leftrightarrow e^{2f^{-1}(x)} + f^{-1}(x) - 1 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x) = e^{2f^{-1}(x)} + f^{-1}(x) - x = 1, x \in \mathbb{R}.$

Γ4. Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow (\varepsilon): y=f'\left(x_0\right)x+f\left(x_0\right)-x_0 f'\left(x_0\right)$.

Θέλουμε $3f^{-1}\left(e^2\right)=f'\left(x_0\right) \Leftrightarrow 3=2e^{2x_0}+1 \Leftrightarrow e^{2x_0}=1 \Leftrightarrow x_0=0$

και $f\left(x_0\right)-x_0 f'\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ Προφανής .Συνεπώς, είναι εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f\left(\frac{x}{e}\right)+1-\frac{x}{e} \le \ln x \le f(x)-x, (1)$

Εύκολα από την (1), $f(x) \ge \ln x + x \ (2)$.

Αν $x \in (0,+\infty)$ τότε $xe \in (0,+\infty)$. Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το ex οπότε:

$f\left(\frac{xe}{e}\right)+1-\frac{xe}{e} \le \ln xe \le f(xe)-xe \Rightarrow$

$f(x)+1-x \le \ln x + \ln e \le f(xe)-xe \Rightarrow$

$f(x)+1-x \le \ln x + 1 \Rightarrow f(x) \le \ln x + x \ (3)$

Από τις $(2),(3)$, $f(x)=\ln x + x, x \in (0,+\infty)$.

Δ2. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε $\ln x_1 < \ln x_2$ και επειδή $x_1 < x_2$ με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $f(x_1) < f(x_2)$,οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα

Η ανίσωση ορίζεται στο $(0,+\infty)$. Ισχύει ότι: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\ln x$.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε: $x\ln x < 1-x \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{x}-1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x}-\ln x \Leftrightarrow$

$f(1) < f\left(\frac{1}{x}\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x < 1 \overset{x\in(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1$.

Για το όριο έχουμε:

$f(\eta\mu x)-f(x)=\ln(\eta\mu x)+\eta\mu x-\ln x - x = \ln\frac{\eta\mu x}{x}+\eta\mu x - x \ (1)$.

Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\frac{\eta\mu x}{x}$, θέτουμε $u=\frac{\eta\mu x}{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\frac{\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{u\to 1}\ln u = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. Από την σχέση (1) τελικά παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(\eta\mu x) - f(x)\right) = 0+0-0=0.$

Δ3. Θα βρούμε το $f\left((0,1)\right)$. Αρχικά $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(\ln x + x) = 1$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως $f\left((0,1)\right) = (-\infty,1)$.

Παρατηρούμε ότι $0\in f\left((0,1)\right) = (-\infty,1)$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Το $x_0\in(0,1)$ είναι ρίζα και είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως και "$1-1$".

Δ4. Το πεδίο ορισμού προκύπτει από το σύστημα: $\begin{cases} x>0 \\ f(x)>0 \end{cases} (\Sigma)$

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ f(x)>f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x>x_0$. Δηλαδή, $A_{gof} = (x_0,+\infty)$.

Οι εφαπτόμενες έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ και $y - g(1) = g'(1)(x-1)$

Έχουμε, $g(1) = f\left(f(1)\right) - 2(1-1) = f(1) = 1 = f(1)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = f'\left(f(x)\right)f'(x) - 2$.

$g'(1) = f'\left(f(1)\right)f'(1) - 2 = f'(1)\cdot 2 - 2 = 4-2 = 2 = f'(1)$.

Τελικά οι εφαπτόμενες συμπίπτουν.